УДК 517.98

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ І НУЛЬОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ СПЕКТРА ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Бобочко В.М.

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи.

A uniform asymptotics of a solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equationss with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of a fase operator consists of multiple and zero elements.

Постановка задачі. У даній роботі буде побудована рівномірна асимптотики розв'язку задачі

$$\mathbf{L}_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - \mathbf{A}W(x,\varepsilon) = h(x),$$
$$\mathrm{E}_1 W(m,\varepsilon) = \mathrm{E}_1[\mu^{-2}\alpha_m + \hat{W}_m], \quad \mathrm{E}_2 \frac{dW(m,\varepsilon)}{dx} = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}\hat{\mathrm{W}}_m] \qquad (1)$$

коли $\varepsilon \to +0,\ x \in I = [0;\mathrm{a}],\ \ \mathrm{m} = 0,\mathrm{a},\ \ \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}.$

Тут **A**–лінійний оператор, заданий в n – вимірному лінійному просторі $\mathbf{R^n}$ для кожного фіксованого $x \in I$, $h(x)$ – відома вектор-функція, $\mathrm{W}(x,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, α_{m}, $\hat{\mathrm{W}}_{\mathrm{m}}$, $m = 0, a$, – відомі початкові вектори, $E_1 = ((a_{ik}))_{i,k=1}^n$, $E_2 = ((b_{ik}))_{i,k=1}^n$ – діагональні матриці, в яких $a_{ii} = 1,\ i = 1 \bigcup \overline{p+s+1,n};\ \ b_{jj} = 1,\ \ j = \overline{2,p+s}$, а всі інші елементи цих матриць рівні нулю.

Задачу (1) будемо вивчати при виконанні таких умов.

Умова 1^0. $A(x),\ h(x) \in C^\infty[I]$, де $A(x)$ – матриця оператора **A** в просторі $\mathbf{R^n}$.

Умова 2^0. Граничний оператор **A** є оператором простої структури і задовольняє умовам

$$\lambda_1(x) \equiv x\tilde{\lambda}_1(x) \le 0 < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_{p+1}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_{p+s}(x),$$
$$\lambda_{p+s+1}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_n(x) \equiv 0,\ \ \tilde{\lambda}_1(x) < 0,\ \ x \in I. \qquad (2)$$

Випадок, коли оператор **A** простої структури і не містить тотожно рівних нулю елементів вивчено в [1-2]. В [3] досліджено випадок случай, коли спектр оператора **A** містить кратні недіагоналізовані елементи, проте він не містить тотожно рівних нулю елементів. Випадок простих стабільних і нульових елементів спектра граничного оператора **A** вивчено в [4]. Сингулярно збурені задачі (СЗЗ) з кратними стабільними елементами спектра вивчено в [5].

Класичний випадок точки звороту вимагає злипання двох елементів спектра в одній або декількох точках. У досліджуваному випадку в точці x =0 відбувається злипання нестабільного елементу $\lambda_1(x)$ з тотожно рівними нулю елементами спектра. Таким чином, вивчається випадок, коли в точці $x=0$ злипаються $n-p-s$ елементів спектра різної структури. Оскільки система (1) другого порядку, то в побудові асимптотики розв'язку СЗЗ (1) беруть участь $2(n-p-s)$ елементів, які обертаються в нуль в точці $x=0$.

Такого типу задачі мають як теоретичний інтерес в теорії сингулярних збурень, так і практичний інтерес. Прикладом сказаного може бути класичне рівняння Орра-Зоммерфельда, яке відіграє важливу роль в гідродинаміці [6-7]. Проте, теорія асимптотичного інтегрування таких задач слабо розвинута. Результати, отримані в [6-7] так і не було узагальнено на випадок систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДУ).

Проведені до цього часу дослідження показали наступне. У загальному випадку, для побудови асимптотики розв'язку таких задач не змогли застосувати апарат добре вивчених функцій Ейрі (див. [10]). Тому дослідимо умови за яких до задачі (1) можна буде застосувати апарат функцій Ейрі і метод, розроблений в [1-3].

З умов (2) бачимо, що вивчається задача (1) у випадку, коли:

1) точка $x=0$ є точкою звороту для задачі (1);

2) спектр граничного оператора $\mathbf{A}$ містить кратні стабільні і кратні тотожно рівні нулю елементи;

3) вироджене векторне рівняння

$$-\mathbf{A}\,\omega(x)=h(x), \tag{3}$$

у загальному випадку, має розрив другого роду в точці $x=0$.

1. Структура розв'язку виродженого векторного рівняння. Перед тим, як перейти до побудови асимптотики розв'язку СЗЗ (1), нам необхідно вивчити умови існування розв'язку векторного рівняння (3) і його структуру.

Оскільки $\mathbf{A}$ є оператором простої структури, то не дивлячись на кратні елементи спектра, існує повна система власних векторів $b_i(x),\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$, які утворюють біортонормовану систему векторів з векторами $b_k^*(x),\ k=\overline{1;n}$. Тут $b_k^*(x),\ k=\overline{1;n}$ – повна система власних векторів оператора $\mathbf{A}^*$, спряженого до оператора $\mathbf{A}$ (див. [8], стор. 218). Для зручності кратному елементу $\lambda_{p+k}(x),\ \ k=\overline{1,s}$ відповідає s лінійно незалежних векторів (фундаментальних розв'язків) $b_{p+k}(x)$. Аналогічно можна сказати і про власні вектори, які відповідають кратному тотожно рівному нулю елементу $\lambda_n(x)$.

Оскільки $\lambda_i(x)\equiv 0,\ \ i=\overline{p+s+1,n}$ є власними значеннями операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}^*$, то $Ker\mathbf{A}=\{b_i(x),\ \ i=\overline{p+s+1,n}\}$, $Ker\mathbf{A}^*=\{b_i^*(x),\ \ i=\overline{p+s+1,n}\}$, тобто $\dim Ker\mathbf{A}=\dim Ker\mathbf{A}^*=n-(p+s)$.

У досліджуваному випадку $\overline{D(\mathbf{A})} = \mathbf{R^n}$, $\overline{R(\mathbf{A})} = \mathrm{R}(\mathbf{A})$. Тоді згідно теореми Хаусдорфа [9], стор. 22, оператор $\mathbf{A}$ нормально розв'язний. У нашому випадку індекс $\chi(\mathbf{A}) = \dim Ker\mathbf{A} - \dim Ker\mathbf{A}^* = 0$. Отже $\mathbf{A}$ – фредгольмівський оператор. Оскільки $Ker\mathbf{A} > 0$, то для векторного рівняння (3) має місце третя фундаментальна теорема Фредгольма, тобто, неоднорідне рівняння (3) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $< h(x), Ker\mathbf{A}^* >= 0$.

Для наступних досліджень нам необхідно дослідити структуру розв'язків неоднорідного рівняння (3).

Для цього розвинемо праву частину векторного рівняння (3) і шуканий розв'язок по базису $b_i(x)$, $\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}$. Отримаємо

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} (h(x), b_i^*(x)) b_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \cdot b_i(x),$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (\omega(x), b_i^*(x)) b_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \cdot b_i(x). \tag{4}$$

З рівності (4) і властивостей біортонормованої системи векторів $\{b_i(x), b_k^*(x)\}$, $i, k = \overline{1, \mathrm{n}}$ бачимо, що умови ортогональності правої частини рівняння (3) до ядра спряженого оператора будуть мати місце тоді, коли $h_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{p+s+1, n}$. Оскільки $\lambda_1(0) = 0$, то для того, щоби права частина рівняння (3) належала множині значень оператора $\mathbf{A}$, необхідно ще, щоб виконувалась точкова умова $h_1(0) =< h(0), b_1^*(0) >= 0$.

Підставимо другу рівність (4) у векторне рівняння (3) і прирівняємо коефіцієнти біля однакових базисних векторах. В процесі виконання цих перетворень буде отримано розв'язок векторного рівняння (3) вигляду

$$\omega(x) = \sum_{i=p+s+1}^{n} \omega_i(x) b_i(x) + \sum_{i=1}^{p+s} \lambda_i^{-1}(x) h_i(x) b_i(x), \tag{5}$$

де $\omega_i(x)$ - довільні, досить гладкі функції коли $x \in I$.

Теорема 1. *Нехай: 1) виконуються Умови* 1^0 *і* 2^0*; 2) права частина рівняння (3) ортогональна до ядра спряженого оператора* $\mathbf{A}^*$; 3) $h_1(0) \equiv (h(0), b_1^*(0)) = 0$.

Тоді на всьому відрізку [0; a] існує досить гладкий розв'язок *векторного рівняння (3), зображений формулою (5), де* $\omega_i(x)$ *- довільні, досить гладкі функції коли* $x \in I$.

2. Розширення збуреної задачі. Для виділення істотно особливих функцій (ІОФ), які виникають у розв'язку СЗЗ (1), поряд з незалежною змінною $x \in I$, введемо в розгляд нову вектор-змінну $t = \{t_1, t_{jk}\}$, $j = \overline{2, p+1}$, $k = 1,2$, компоненти якої визначимо згідно формул

$$t_{jk} = \varepsilon^{-1} \varphi_{jk}(x) \equiv \mu^{-3} (-1)^k \int_{(k-1)a}^{x} \sqrt{\lambda_j(x)} dx \equiv \Phi_{jk}(x, \varepsilon),$$

$$t_1 = t_{1k} = \mu^{-2}\varphi_1(x) \equiv \mu^{-2}\left(\frac{3}{2}\int\limits_o^x \sqrt{-\lambda_1(x)}dx \right)^{2/3} \equiv \Phi_1(x,\varepsilon).$$

Тоді, згідно розробленого методу (див. [1-3]), для визначення розширеної вектор-функції $\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)$ отримаємо наступну розширену задачу:

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \widetilde{W}(x,t,\varepsilon) = h(x), \quad M_m = (m, t(m)),$$

$$E_1\widetilde{W}(M_m,\varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + W_m^0], \quad E_2\frac{d\widetilde{W}(M_m,\varepsilon)}{dx} = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}W_m^0]. \tag{6}$$

Тут

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{p+1}[[\varphi'_{jk}(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial t_{jk}^2} + \mu^3 d_{jk}\frac{\partial}{\partial t_j}] + \mu^2[\varphi'_1(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} +$$
$$+ \mu^4 d_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu^6\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbf{A} + \mathbf{Y}_\varepsilon^\perp, \tag{7}$$

де

$$d_{jk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi''_{jk}(x), \quad d_1 \equiv 2\varphi'_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi''_1(x),$$

а $\mathbf{Y}_\varepsilon^\perp$ – оператор-анулятор. Явний вигляд цього оператора при необхідності легко виписати.

3. Простори безрезонансних розв'язків (ПБР). Опишемо підпростори вектор-функцій, в яких будемо розв'язувати розширену задачу. Маємо

$$Y_{rijk} = \{b_i(x)\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}\}, \quad j = \overline{2, p+1}, \quad Y_{ri1k} = \{b_i(x)[V_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U'_k(t_1)]\},$$

$$V_{ri} = \{b_i(x)[f_{ri}(x)\Psi(t_1) + g_{ri}(x)\Psi'(t_1)]\}, \quad X_{ri} = \{b_i(x)\omega_{ri}(x)\}, \ i = \overline{1;n}, \ k = 1,2. \tag{8}$$

Тут $\alpha_{rijk}(x), V_{rik}(x), Q_{rik}(x), f_{ri}(x), g_{ri}(x), \omega_{ri}(x) \in C^\infty[I]$, $U_k(t_1)$, κ=1,2 – функції Ейрі, властивості яких описано в [11], $\psi(t_1)$ – істотно особлива функція, явний вигляд і властивості якої описано в [1–4].

Із підпросторів (8) складемо новий простір

$$Y_r \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri} \equiv \bigoplus_{i=1}^{n}\left[\bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{j=1}^{p+1} Y_{rijk} \oplus V_{ri} \oplus X_{ri}\right]. \tag{9}$$

Елемент цього простору має вигляд

$$W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)W_{ri}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n}\widetilde{W}_{ri}(x,t), \tag{10}$$

де

$$W_{ri}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{p+1}\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}+\sum_{k=1}^{2}[V_{rik}(x)U_k(t_1)+Q_{rik}(x)U_k'(t_1)]+$$

$$+\,\mathrm{f}_{\mathrm{ri}}(x)\Psi(t_n)+g_{ri}(x)\Psi'(t_n)+\omega_{ri}(\mathrm{x})\ .$$

4. Регуляризація сингулярно збуреної задачі. У цьому параграфі нам необхідно вивчити дію розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon}$ на елементи простору (9). Методика таких досліджень описана в [1-3]. Тому запишемо кінцевий результат дії розширеного оператора (7) на елемент ПБР (9). Дослідження показали, що дія оператора (7) на елементи ПБР (9), можна записати у вигляді тотожності

$$\widetilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon}W_r(x,t)\equiv[\mathbf{R}_0+\mu^2\mathbf{R}_2+\mu^3\mathbf{R}_3+\mu^4\mathbf{R}_4+\mu^6\mathbf{R}_6]W_r(x,t)\ , \tag{11}$$

де оператори $\mathbf{R_k}$, записані в їх дії на елементи ПБР (9), мають наступний вигляд:

$$\mathbf{R_0}W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\{\sum_{j=2}^{p+1}[\lambda_j(x)-\lambda_i(x)]\sum_{k=1}^{2}\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}+[\lambda_1(x)-$$

$$-\lambda_i(x)]\cdot[\sum_{k=1}^{2}[V_{rik}(x)U_k(t_1)+Q_{rik}(x)U_k'(t_1)]+f_{ri}(x)\Psi(t_1)+g_{ri}(x)\Psi'(t_1)]-\lambda_i(x)\omega_{ri}(x)\}\equiv \tag{12}$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R_{0\mathit{i}}}\widetilde{W}_{ri}(x,t)\equiv\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}b_i(x)\mathbf{R_{0\mathit{i}}}W_{ri}(x,t),$$

$$\mathbf{R_2}W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\{[\varphi_1'(x)]^2f_{ri}(x)-\widetilde{D}_{i1}[g_{ri}(x)\Psi(t_1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}Q_{rik}(x)U_k(t_1)]-\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n}\varphi_1(x)T_{\nu i1}[\sum_{k=1}^{2}Q_{r\nu k}(x)U_k(t_1)+g_{r\nu}(x)\Psi(t_1)]\},\tag{13}$$

$$\mathbf{R_3}W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\{\sum_{j=2}^{p+1}\sum_{k=1}^{2}[D_{ijk}\alpha_{rijk}(x)+\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n}T_{\nu ijk}\alpha_{r\nu jk}(x)]\exp t_{jk}\},\tag{14}$$

$$\mathbf{R_4}W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\{\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n}T_{\nu i1}[\sum_{k=1}^{2}V_{r\nu k}(x)U_k'(t_1)+f_{r\nu}(x)\Psi'(t_1)+$$

$$+g_{r\nu}(x)]+D_{i1}[\sum_{k=1}^{2}V_{rik}(x)U_k'(t_1)+f_{ri}(x)\Psi'(t_1)+g_{ri}(x)],\quad \mathbf{R_4}W_r(x,t)\equiv\frac{\partial^2W_r(x,t)}{\partial x^2}.\tag{15}$$

Тут оператори D_{ijk}, D_{i1}, $T_{\nu ij}$ мають вигляд

$$D_{ijk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x)[\frac{\partial}{\partial x} + (b'_i(x), b^*_i(x))] + \varphi''_{jk}(x), \quad \widetilde{\mathrm{D}}_{i1} \equiv \varphi_1(x) D_{i1} + [\varphi'_1(x)]^2,$$

$$T_{\nu ijk} = 2\varphi'_{jk}(x)(b'_\nu(x), b^*_i(x)), \quad T_{\nu i1} = 2\varphi'_1(x)(b'_\nu(x), b^*_i(x)). \tag{16}$$

Результат дії оператора $\mathbf{R}_6 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на елемент ПБР (9) буде відігравати другорядну роль у побудові асимптотики розв'язку СЗЗ (1). Тому ми не будемо записувати явний вигляд дії цього оператора на елемент простору безрезонансних розв'язків.

Висновки.

1. Простори безрезонансних розв'язків (9) інваріантні відносно операторів $\mathbf{R}_k$, $k = 0,2,3,4,6$, а отже і відносно розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$, зображеного тотожністю (11).

2. Оператор $\mathbf{R_0}$ є головним оператором розширеного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ в просторі безрезонансних розв'язків (9).

3. Розширена задача (6) регулярно збурена відносно малого параметра $\mu > 0$ у ПБР (9), тобто, ми провели ***регуляризацію сингулярно збуреної задачі (1).***

5. Формалізм побудови розв'язку розширеної задачі. Асимптотику розв'язку розширеної задачі (6) будуємо у вигляді ряду

$$\widetilde{W}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r W_r(x,t), \quad W_r(x,t) \in Y_r \ . \tag{17}$$

Підставимо формально ряд (17) у розширену задачу (6). Тоді для визначення коефіцієнтів цього ряду отримаємо наступну рекурентну систему задач:

$$\mathbf{R}_0 W_{-2}(x,t) = 0, \quad \mathrm{E}_1 W_{-2}(M_m) = E_1 \alpha_{m,},$$

$$GW_{-2}(M_m) \equiv E_2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{p+1} [\varphi'_{jk}(m)]^2 \frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_{jk}} = 0, \tag{18}$$

$$\mathbf{R}_0 W_{-1}(x,t) = 0, \quad \mathrm{E}_1 W_{-1}(M_m) = 0, \ GW_{-1}(M_m) = \mathrm{E}_2[\alpha_m - \varphi'_1(\mathrm{m}) \frac{\partial \mathrm{W}_{-2}(M_m)}{\partial \mathrm{t}_1}],$$

(19)

$$\mathbf{R}_0 W_0(x,t) = h(x) - \mathbf{R}_2 W_{-2}(x,t), \quad \mathrm{E}_1 W_0(M_m) = \mathrm{E}_1 \mathcal{C}_m,$$

$$GW_0(M_m) = \mathrm{E}_2[W_m - \varphi'_1(m) \frac{\partial W_{-1}(M_m)}{\partial t_1}], \tag{20}$$

$$\mathbf{R}_0 W_r(x,t) = -\mathbf{R}_2 W_{r-2} - \mathbf{R}_3 W_{r-3} - \mathbf{R}_4 W_{r-4} - \mathbf{R}_6 W_{r-6},$$

$$E_1 W_r(M_m) = 0, \ GW_r(M_m) = -E_2[\varphi'_1(m) \frac{\partial W_{r-1}(M_m)}{\partial t_1} - \frac{\partial W_{r-3}(M_m)}{\partial x}. \tag{21}$$

6. Теорема про існування розв'язку ітераційних векторних рівнянь в ПБР. Нам необхідно вивчити умови існування розв'язку у ПБР (9) ітераційного векторного рівняння

$$\mathbf{R}_0 W_r(x,t) = H_r(x,t)\,. \tag{22}$$

Запишемо структуру ядра оператора $\mathbf{R_0}$. Використовуючи тотожність (12), маємо

$$\mathbf{KerR}_0 = \{b_j(x)\alpha_{rjjk}(x)\exp t_{jk},\quad \mathrm{j} = \overline{2;p},\quad b_j(x)\alpha_{rjjk}(x)\exp t_{(p+1)k},$$

$$j = \overline{p+1;p+s},\quad b_1(x)[V_{r1k}(x)U_k(t_1) + Q_{r1k}(x)U_k'(t_1)],\quad \mathrm{k} = 1,2,$$

$$b_1(x)[f_{r1}(x)\psi\ (t_1) + g_{r1}(x)\psi'\ (t_1)],\quad \mathrm{b_i}(x)\omega_{ri}(x),\ \ \mathrm{i} = \overline{\mathrm{p+s+1,n}}\}. \tag{23}$$

Оскільки ПБР (9) інваріантні відносно головного оператора $\mathbf{R_0}$, і розв'язки рівняння (22) шукаємо у ПБР (9), то права частина ітераційного рівняння (22) повинна з необхідністю теж належати цьому простору.

Таким чином, нехай $H_r(x,t) \in Y_r$. Запишемо явний вигляд цієї вектор-функції. Нехай

$$H_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\cdot\{\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{j=2}^{p+1}[\beta_{rijk}(x)\exp t_{jk} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}[A_{rik}(x)U_k(t_1) + B_{rik}(x)U'(t_1)] + m_{ri}(x)\Psi(t_1) + \ l_{ri}(x)\Psi'(t_1) + S_{ri}(x)\}\,. \tag{24}$$

З тотожності (12) бачимо, що оператор $\mathbf{R_0}$ звідний над простором

$$Y_r = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri}$$

(див. [11], стор. 36), тобто, в цьому просторі має місце розвинення

$$\mathbf{R_0} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{R_{0i}}\,, \tag{25}$$

де оператори $\mathbf{R_{0\,i}}$**:** $Y_r \to Y_{ri}$ однозначно визначені і при необхідності, використовуючи (12), легко виписати результат дії цих операторів на елементи $W_{ri}(x,t) \in Y_{ri}$, $i = \overline{1,n}$.

Отже, за аналогією з результатами, описаними в [1], дослідження векторного рівняння (22) в просторі Y_r можна замінити на дослідження n скалярних рівнянь

$$\mathbf{R_{0i}} W_{ri}(x,t) = H_{ri}(x,t),\qquad i = \overline{1,n}\,, \tag{26}$$

кожне із яких задано відповідно в підпросторі Y_{ri}.

Висновок **4**. Кратні елементи не вплинули на зображення (25) і (26).

Особливості кратних нульового і ненульового елементів спектра граничного оператора почнуть виникати при побудові і дослідженні розв'язків скалярних рівнянь (26).

В ПБР (9) оператор $\mathbf{R_0}$ є діагональним. Отже оператор $\mathbf{R_0}$ самоспряжений, тобто $Ker\mathbf{R_0} = Ker\mathbf{R_0}^*$. Оператор $\mathbf{R_0}$ є оператором Фредгольма, причому ядро спряженого оператора не пуста множина. Тому до рівняння (22) можна застосувати третю фундаментальну теорему Фредгольма.

Оскільки оператор $\mathbf{R_0}$ самоспряжений, то умова ортогональності правої частини рівняння (22) до ядра спряженого оператора $\mathbf{R_0}^*$ еквівалентна твердженню, що права частина векторного рівняння (22) не містить елементів ядра оператора $\mathbf{R_0}$. Ми не маємо у явному вигляді спряженого оператора $\mathbf{R_0}^*$. Тому умову ортогональності замінимо умовою відсутності в правій частині рівняння (22) елементів ядра оператора $\mathbf{R_0}$ (див. (23)). Ця умова в досліджуваній задачі є досить наочною і її легко застосувати при побудові асимптотики розв'язку розширеної задачі (6).

При дослідженні скалярних рівнянь (26) необхідно буде окремо розглядати наступні чотири випадки.

Випадок 1. Нехай $i=1$, тобто, розглянемо скалярне рівняння $\mathbf{R_{01}}W_{r1}(x,t) = H_{r1}(x,t)$. Зрівнявши коефіцієнти біля однакових ІОФ, однозначно визначимо всі коефіцієнти функції $W_{r1}(x,t)$, окрім коефіцієнтів $V_{r1k}(x),\ Q_{r1k}(x),\ f_{r1}(x),\ g_{r1}(x),\ k=1,2$, які будуть відсутні в лівій частині досліджуваного рівняння, оскільки $[\lambda_1(x) - \lambda_i(x)]\big|_{i=1} \equiv 0$.

Для отримання гладкого розв'язку $\omega_{r1}(x) \equiv \lambda_1^{-1}(x) S_{r1}(x)$ необхідно вимагати, щоб $S_{r1}(0) = 0$.

Таким чином, якщо $S_{r1}(0) = 0$, то з рівняння (26) коли i=1 однозначно визначимо всі досить гладкі коефіцієнти функції $W_{r1}(x,t)$, окрім елементів ядра оператора $\mathbf{R_0}$.

Щоб не повторятись, явні формули для визначення цих коефіцієнтів буде виписано пізніше, оскільки вони будуть придатні для всіх індексів $i = \overline{1,n}$.

Випадок 2. Нехай. $i = \overline{2,p}$, причому індекс i фіксований. У цьому випадку права частина рівняння (26) згідно припущення, не повинна містити двох елементів $\beta_{riik}(x)\exp t_{ik}$, $k=1,2$ ядра оператора $\mathbf{R_0}$. Тоді однозначно визначимо всі коефіцієнти функції $W_{ri}(x,t),\ i=\overline{2,p}$, окрім коефіцієнтів $\alpha_{riik}(x)\exp t_{ik}$, $k=1,2$.

Випадок 3. Розглянемо рівняння (26) при $i = \overline{p+1, p+s}$. Тут ми повинні припустити, що права частина рівняння (26) не містити елементів

$\beta_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k}$, $k=1{,}2$. У цьому випадку нами не будуть визначені функції $\alpha_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k}$, $k=1{,}2$.

Випадок 4. Нехай $i=\overline{p+s+1,n}$. В лівій частині рівняння (26) відсутні доданки $-\lambda_i(x)\omega_{ri}(x)$. Тому права частина теж не повинна містити відповідні елементи $S_{ri}(x)\equiv 0$, $i=\overline{p+s+1,n}$. Аналогічно, з того, що права частина ітераційного рівняння (22) належить області значень оператора $\mathbf{R_0}$ (див. (12)) і врахувавши умови $\lambda_1(0)-\lambda_i(0)=0$, $i=\overline{p+1,p+s}$, ми повинні вимагати, щоб права частина рівняння (22) задовольняла умовам

$b_i(0)A_{rik}(0)=b_i(0)B_{rik}(0)=b_i(0)m_{ri}(0)=b_i(0)l_{rik}(0)=0$, $i=\overline{p+s+1,n}$.(*)

Теорема 2. *Нехай: 1) виконуються умови* 1^0 *і* 2^0*; 2) права частина рівняння (22) не містить елементів ядра оператора* $\mathbf{R_0}$; *3)* $S_{r1}(0)=0$; *4 мають місце умови (*).*

Тоді в ПБР (9) існує розв'язок *рівняння (22), вигляду*

$$W_r(x,t)=Z_r(x,t)+y_r(x,t). \tag{27}$$

Тут

$$Z_r(x,t)\equiv b_1(x)\{\sum_{k=1}^{2}[V_{r1k}(x)U_k(t_1)+Q_{r1k}(x)U'_k(t_1)]+f_{r1}(x)\Psi(t_1)+g_{r1}(x)\Psi'(t_1)\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\{\sum_{j=2}^{p}b_j(x)\alpha_{rjjk}(x)\exp t_{jk}+\sum_{i=p+1}^{p+s}b_i(x)\alpha_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k}\}+\sum_{i=p+s+1}^{n}b_i(x)\omega_{ri}(x),$$

(28)

де коефіцієнти біля ІОФ і $\omega_{ri}(x)$ *є довільними, досить гладкими функціями коли* $x\in I$.

Функція $y_r(x,t)$ *визначена згідно формули*

$$y_r(x,t)\equiv\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\{\sum_{k=1}^{2}[V_{rik}(x)U_k(t_1)+Q_{rik}(x)U'_k(t_1)]+f_{ri}(x)\Psi(t_1)+g_{ri}(x)\Psi'(t_1)\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{p+1}\sum_{i=1,i\neq j}^{n}b_i(x)\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}+\sum_{i=1}^{p+s}b_i(x)\omega_{ri}(x), \tag{29}$$

коефіцієнти якої однозначно визначаються з формул

$\alpha_{rijk}(x)\equiv[\lambda_i-\lambda_j]^{-1}\cdot\beta_{rijk}(x),\ i=\overline{1;n},\ j=\overline{2,p+1},\ i\neq j,\ k=1{,}2,$

$V_{rik}(x)\equiv[\lambda_i-\lambda_1]^{-1}\cdot A_{rik}(x),\ Q_{rik}(x)\equiv[\lambda_i-\lambda_1]^{-1}\cdot B_{rik}(x),\ i=\overline{2;n},\quad k=1;2,$

$f_{ri}(x)\equiv[\lambda_i-\lambda_1]^{-1}m_{ri}(x),\ g_{ri}(x)\equiv[\lambda_i-\lambda_1]^{-1}n_{ri}(x),\ i=\overline{2;n}$,

$\omega_{ri}(x)\equiv\lambda_i^{-1}(x)\cdot S_{ri}(x),\quad i=\overline{1;p+s}$..

7. Побудова головного члена асимптотики розв'язку розширеної задачі. Скориставшись теоремами 1 і 2, покажемо, що серія ітераційних задач (18)-(21) асимптотично коректна в просторі безрезонансних розв'язків (9).

Згідно з теоремою 2, розв'язками однорідних ітераційних рівнянь (18) і (19) в ПБР (9) будуть вектор-функції $W_r(x,t) = Z_r(x,t),\ \ r = -2;-1$, де вектор-функції $Z_r(x,t)$ визначаються згідно формули (28), коефіцієнти яких, до певного часу, будуть довільними досить гладкими функціями коли $x \in I$.

Обчислимо і дослідимо праву частину рівняння (19). Скориставшись тотожністю (13), отримаємо

$$H_0(x,t) \equiv h(x) - \mathbf{R_2}W_{-2}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i(x)b_i(x) - b_1(x)\{\varphi_1'^2(x)f_{(-2)1}(x) +$$

$$+\tilde{\mathrm{D}}_{i1}[\sum_{k=1}^{2} Q_{(-2)1k}(x)U_k(t_1) + g_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)]\} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n} b_i(x)\varphi_1(x)T_{1i1}[\sum_{k=1}^{2} Q_{(-2)1k}(x)U_k(t_1) + g_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)].$$

Умови 3) теореми 2 ми зможемо задовольнити за рахунок довільності функції $f_{(-2)1}(x)$, тобто задамо початкову умову

$$f_{(-2)1}(0) = -[\varphi_1'(0)]^{-2} \cdot (h(0), b_1^*(0)) = f_{(-2)1}^0 \qquad (30)$$

Виберемо функції $Q_{(-2)1k}(x),\ \ g_{(-2)1}(x),\ \ \ k = 1;2$ як розв'язки задач

$$\tilde{D}_{11}Q_{(-2)1k}(x) = 0,\ \left|Q_{(-2)1k}(0)\right| < \infty,\quad \tilde{D}_{11}g_{(-2)1}(x) = 0,\ \left|g_{(-2)1k}(0)\right| < \infty \ (31)$$

Розв'язками цих задач в ПБР (9) будуть тотожні нулі. Права частина рівняння (21) набуде вигляду

$$H_0(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i(x)b_i(x) - b_1(x)\varphi_1'^2(x)f_{(-2)1}(x)\,. \qquad (32)$$

У правій частині цієї рівності все ще є елементи $b_i(x)h_i(x),\ \ i = \overline{p+s+1,n}$ ядра оператора $\mathbf{R_0}$. За рахунок довільності деяких функцій ми вже не зможемо знищити елементи ядра оператора $\mathbf{R_0}$, які ще залишились у правій частині рівняння (20). Таке явище в теорії сингулярних збурень виникає вперше і пояснюється це наявністю тотожно рівних нулю елементів спектра граничного оператора $\mathbf{A}$.

Тому для того, щоб виконувались умови 2) теореми 2 ми повинні припустити, що виконуються умови

$$h_i(x) \equiv (h(x), b_i^*(x)) \equiv 0,\ \ i = \overline{p+s+1,n}\,, \qquad (33)$$

тобто, права частина виродженого рівняння (3) ортогональна до ядра спряженого оператора $\mathbf{A}^*$ (див. умови 2) теореми 1).

Висновок 5. Таким чином, для побудови рівномірно придатної на всьому відрізку $[0;a]$ асимптотики розв'язку СЗЗ (1) необхідно, щоб виконувались умови (33), тобто, щоб мали місце умови 3) теореми 1.

Бачимо, що права частина рівняння (20) задовольняє умову 4) теореми 2.

Отже, якщо виконуються умови (30) і (33), то згідно теореми 2, у ПБР Y_0 існує розв'язок рівняння (20), зображений у вигляді формул (27)-(29), де

$$y_0(x,t) \equiv \omega_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{p+s} \omega_{0\,i}(x) b_i(x).$$

Перейдемо до розв'язання наступного ітераційного рівняння (21) в ПБР Y_1. Схема дослідження аналогічна попередній, тобто:

а) необхідно обчислити праву частину цього рівняння;

б) необхідно вимагати, щоб за рахунок довільності деяких функцій, які містяться у правій частині досліджуваного рівняння, виконувались умови 2)-3) теореми 2;

в) потрібно, щоб виконувались умови 4) теореми 2;

г) скориставшись теоремою 2, треба записати розв'язок рівняння (21) у просторі Y_1.

Зауваження 2. Умову 4) теореми 2 ми не зможемо задовольнити ніякими степенями свободи попередніх розв'язків, як це було зроблено з умовами 2) і 3) теореми 2. Така складність продиктована присутністю тотожно рівних нулю елементів спектра граничного оператора. Тому для застосування теорем 2 до побудови асимптотики розв'язку рівняння (25) ми повинні постулювати виконання умов 4) теореми 2.

У цьому циклу ми визначили початкову умову $f_{(-1)1}(0) = 0$, функції $Q_{(-1)1k}(x) \equiv g_{(-1)1}(x) \equiv 0$ і отримали $2(p-1)$ скалярних диференціальних рівнянь ($r = -2$)

$$D_{jjk} \alpha_{rjjk}(x) = 0, \quad j = \overline{2,p}, \quad k = 1,2 \,, \tag{34}$$

з яких визначимо функції $\alpha_{(-2)\,jjk}(x) = C^0_{(-2)\,jk} \tilde{\alpha}_{(-2)\,jjk}(x)$ з точністю до довільних сталих множників $C^0_{(-2)\,jk}$.

Врахувавши тотожність (14), для визначення цих функцій отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь ($r = -2$):

$$2\varphi'_{(p+1)k}(x)\alpha'_{r(p+1)k}(x) + [M + \varphi''_{(p+1)k}(x)]\alpha_{r(p+1)k}(x) = 0, \tag{35}$$

де

$$M=\begin{pmatrix} T_{(p+1)(p+1)(p+1)k} & \cdot & T_{(p+s)(p+1)(p+1)k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{(p+1)(p+s)(p+1)k} & \cdot & T_{(p+s)(p+s)(p+1)k} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{r(p+1)k}=\begin{pmatrix} \alpha_{r(p+1)(p+1)k}(x) \\ \cdot \\ \alpha_{r(p+s)(p+1)k}(x) \end{pmatrix}.$$

Висновок 6. Кратність стабільного елементу $\lambda_{p+1}(x)$ внесла наступну особливість: коефіцієнти $\alpha_{ri(p+1)k}(x)$, $i=\overline{p+1,p+s}$, які знаходяться біля ІОФ $b_i(x)\exp t_{(p+1)k}$, $i=\overline{p+1,p+s}$, породжені кратним елементом, визначаються вже як розв'язки системи диференціальних рівнянь (35). Якщо $s=1$, то система диференціальних рівнянь (35) перетворюється в скалярне диференціальне рівняння (34).

Продовжуючи поступово розв'язувати ітераційні рівняння (21) коли $r=\overline{1,6}$, нами буде визначена функція

$$W_0(x,t,\varepsilon)\equiv\sum_{r=-2}^{0}\mu^r W_r(x,t), \tag{36}$$

у якій кожний елемент $W_r(x,t)$ містить довільні сталі, отримані при інтегруванні диференціальних рівнянь (34), системи диференціальних рівнянь (35) та диференціальних рівнянь

$$D_{11}V_{r1k}(x)=0,\quad r=\overline{-2,0},\quad k=1,2. \tag{37}$$

Кожний доданок вектор-функції (36) містить ще довільні сталі C_{rik}, $i=\overline{p+s+1,n}$ (див. рівність (28)). Отже, кожна з функцій $W_r(x,t)$ містить $2n$ довільних сталих. Походження цих сталих не є очевидним і в попередніх дослідженнях таке явище не спостерігалось. Тому є сенс дати більш детальне пояснення їх походження.

При обчисленні правої частини рівняння (21) при $r=\overline{4,6}$ вперше брав участь оператор $\mathbf{R_6}\equiv\partial^2/\partial x^2$. Провівши необхідні обчислення, отримаємо тотожність

$$\mathbf{R_6}\omega_r(x)\equiv\partial^2/\partial x^2\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\omega_{ri}(x)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)D\omega_{ri}(x),$$

де

$$D\omega_{ri}(x)\equiv\omega''_{ri}(x)+\sum_{s=1}^{n}[(b''_s(x),b_i^*(x))\omega_{rs}(x)+2(b'_s(x),b_i^*(x))\omega'_{rs}(x)].$$

Оскільки функції $\omega_{ri}(x)$, $i=\overline{p+s+1,n}$ в розв'язках $Z_r(x,t)$, $r=\overline{-2,0}$ були довільними (див. (28)), то для того, щоб задовольнялись умови

2) теореми 2, ці функції визначимо як розв'язки системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$D\widetilde{\omega}_r(x) = 0, \qquad (38)$$

де $\widetilde{\omega}_r(x) = colon(\omega_{r(p+s+1)}(x), \cdots, \omega_{rn}(x))$ – невідомий вектор-стовпець.

Висновок 7. Кратний, тотожно рівний нулю елемент спектра граничного оператора **A** вносить в побудову асимптотики розв'язку СЗЗ (1) наступні особливості:

1) відповідні довільні функції $\omega_{ri}(x)$, $i = \overline{p+s+1, n}$ визначаються з системи $(n-p-s)$ диференціальних рівнянь, що є характерною рисою кратності спектрального елементу;

2) тотожно кратний нулю елемент $\lambda_n(x)$ утворює вже систему диференціальних рівнянь (38) другого порядку.

Зауваження 3. Властивість 1) є загальною для СЗЗ з стабільним, знакозмінним спектром і для задач з точками звороту з кратними, але не рівними тотожно нулю елементами спектра. Властивість 2) вперше з'явилась при дослідженні рівняння (1) з тотожно рівним нулю елементом спектра граничного оператора.

Продовжуючи далі поступово розв'язувати ітераційні рівняння (21) коли $r > 6$, методом математичної індукції можна показати наступне. Для кожної правої частини $H_r(x,t)$ ітераційних рівнянь (21), за рахунок довільних функцій, які містяться у попередніх розв'язках, завжди можна задовольнити умови 2) і 3) теореми 2. А це означає, що кожне ітераційне рівняння (21), згідно теореми 2, має розв'язок в ПБР (9), тобто серія ітераційних рівнянь (18)-(21) асимптотично коректна в ПБР (9).

8. Однозначна розв'язність розв'язків ітераційних задач. У попередньому пункті сказано, що кожний розв'язок ітераційного рівняння (18)-(21) містить $2n$ довільних сталих. Покажемо, що, використовуючи крайові умови (18)-(21), ці сталі буде визначено однозначно.

Запишемо структуру загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь (35). Оскільки всі коефіцієнти цієї системи є досить гладкими функціями, то згідно класичної теорії існує фундаментальна система розв'язків (ФСР) цієї системи вигляду ($k = 1,2$)

$$\begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{r(p+1)(p+1)k1}(x), \cdots, \widetilde{\alpha}_{r(p+1)(p+1)ks}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{\alpha}_{r(p+s)(p+1)k1}(x), \cdots, \widetilde{\alpha}_{r(p+s)(p+1)ks}(x), \end{array} \qquad (39)$$

яка задовольняє наступним умовам:

$$\widetilde{\alpha}_{r(p+l)(p+1)kl}[(k-1)a] = 1, \quad k = 1,2, \quad l = \overline{1,s}. \qquad (40)$$

Інші функції, які містяться в ФСР (39), обертаються в нуль в точках $x=0$ і $x=a$.

Врахувавши структуру отриманої ФСР, загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (35) запишемо у вигляді ($j=\overline{p+1,p+s}$)

$$\alpha_{rj(p+1)k}(x)=\sum_{l=1}^{s}C_{r(p+l)k}\widetilde{\alpha}_{rj(p+l)kl}(x). \qquad (41)$$

З врахуванням початкових умов (40) отримаємо початкові значення

$$\alpha_{rj(p+1)k}[(k-1)a]=C_{rj)k}, \qquad j=\overline{p+1,p+s}, \qquad (42)$$

які пізніше буде практично використовувати при визначенні довільних сталих, які містяться в розв'язках ітераційних рівнянь (18)-(21).

За аналогією з отриманим, нам необхідно записати структуру загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь (38). З врахуванням того, що система (38) є системою диференціальних рівнянь другого порядку, отримаємо наступні аналоги формул (41) і (42):

$$\omega_{rj}(x)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=p+s+1}^{n}C_{rkl}\widetilde{\omega}_{rjkl}(x), \quad j=\overline{p+s+1,n}, \qquad (43)$$

де $\omega_{rjkl}(x)$ – елементи двох ФСР при $k=1,2$, причому

$$\omega_{rlkl}[(k-1)a]=1, \quad \omega_{rjkl}[(k-1)a]=0, \quad l\neq j.$$

В нашому випадку маємо

$$\omega_{rj}(0)=C_{r1j}+C_{r2j}\omega_{rj2j}(0), \quad \omega_{rj}(a)=C_{r2j}+C_{r1j}\omega_{rj1j}(a).$$

Введемо позначення $C_r=(C_r^1,C_r^2)$, де

$$C_r^1=(C_{r11},C_{r21},C_{r1(p+s+1)},\cdots,C_{r1n},C_{r2(p+s+1)},\cdots,C_{r2n}),$$

$$C_r^2=(C_{r12},\cdots,C_{r1(p+s)},\cdots,C_{r22},\cdots,C_{r2(p+s)}).$$

Підставимо отриманий розв'язок $W_{-2}(x,t)\equiv Z_{-2}(x,t)$ у крайові умови (18). В результаті такої підстановки маємо таку систему $2n$ алгебраїчних рівнянь (r=-2):

$$\Delta(\varepsilon)\,C_r=\Gamma_r. \qquad (44)$$

Тут $\Gamma_r=(\Gamma_r^1,\Gamma_r^2)$ – відомий вектор явний вигляд якого буде записано пізніше, $C_r=(C_r^1,C_r^2)$ – шуканий вектор, компоненти якого потрібно визначити.

Крайові умови (18) такі, що система (44) може бути записана у вигляді двох систем

$$\Delta_1(\varepsilon)C_r^1=\Gamma_r^1, \quad \Delta_2(\varepsilon)C_r^2=\Gamma_r^2, \qquad (45)$$

в яких Γ_r^2 – відомий вектор, а Γ_r^1– теж відомий вектор, але вже містить в компоненти вектора Γ_r^2. Отже, спочатку можна розв'язати другу систему (45), а після – першу систему (45), що нами і буде зроблено.

Матрицю $\Delta_2(\varepsilon)$ можна записати у вигляді наступної блочної матриці:

$$\Delta_2(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Delta_{211}(0) & \Delta_{212}(0)\\ \Delta_{221}(a) & \Delta_{2122}(a)\end{pmatrix}, \qquad (46)$$

де при $k=0,1$ маємо

$$\Delta_{2(1+k)(1+k)}(x)=\begin{pmatrix} b_{22}(ak)[\varphi'_{2(1+k)}(x)]^2 & \cdot & b_{(p+s)2}(ak)[\varphi'_{(p+s)(1+k)}(x)]^2\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{2(p+s)}(ak)[\varphi'_{2(1+k)}(x)]^2 & \cdot & b_{(p+s)(p+s)}(ak)[\varphi'_{(p+s)(1+k)}(x)]^2\end{pmatrix}.$$

Кожний член двох блочних матриць Δ_{2ij}, $i\neq j$ містить у вигляді множника експоненту, яка прямує до нулю при прямуванні малого параметра до нулю. З врахуванням сказаного визначник матриці (46) можна записати у вигляді

$$\det\Delta_2(\varepsilon)=\prod_{k=1}^{2}\det\Delta_{2kk}+\mathbf{O}(\varepsilon)\equiv\prod_{k=1}^{2}\left|\widetilde{B}_2((k-1)a)\right|[\varphi'_{jk}((k-1)a)]^2+\mathbf{O}(\varepsilon),$$

де

$$\widetilde{B}_2(x)=\begin{pmatrix} b_{22}(x) & \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{(p+s)2}(x)\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ b_{2(p+s)}(x) & \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{(p+s)(p+s)}(x)\end{pmatrix},$$

Оскільки $\varphi'_{jk}((k-1)a)\neq 0$ для всіх $j=\overline{2,p+s}$, $k=1,2$, то справедлива лема.

Лема 1. *Нехай* $\det\widetilde{B}_2((k-1)a)\neq 0$, $k=1,2.$ *Тоді для досить малих значень параметра* $\varepsilon>0$ *визначник матриці (46) не дорівнює нулю.*

При виконанні умов леми 1, із другої системи (45) однозначно визначимо вектор C^2_{-2}. Підставимо компоненти знайденого вектора C^2_{-2} у першу систему (45) і перейдемо до її дослідження. Визначник отриманої системи має вигляд

$$\Delta_1=\begin{pmatrix} b_{11}(0) & 0 & b_{(p+s+1)1}(0) & \cdot & b_{n1}(0)\omega_{rnn2}(0)\\ b_{11}(a)\beta_1 & b_{11}(a)\beta_2 & b_{(p+s+1)1}(a)\omega_{r(p+s+1)(p+s+1)1}(a) & \cdot & b_{n1}(a)\\ b_{1(p+s+1)}(0) & 0 & b_{(p+s+1)(p+s+1)}(0) & \cdot & b_{n(p+s+1)}(0)\omega_{rnn2}(0)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{1n}(0) & 0 & b_{(p+s+1)n}(0) & \cdot & b_{nn}(0)\omega_{rnn2}(0)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{1n}(a)\beta_1 & b_{1n}(a)\beta_2 & b_{1n}(a)\beta_2 & \cdot & b_{nn}(a)\end{pmatrix},$$

де

$\beta_k = [\varphi'_{1k}(a)]^{-1/2} U_k(t_1(a)),\ \omega_{rjjk}(x),\ j = \overline{p+s+1,n},\ k = 1,2$ – функції, які входять у загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (38) (см.(43)).

Нехай $\det\Delta_1 \neq 0$. Тоді з неоднорідної системи $2(n-p-s+1)$ алгебраїчних рівнянь $\Delta_1 C_{-1}^1 = \Gamma_{-1}^1$ однозначно визначимо невідомий вектор C_{-1}^1, а отже, нами буде однозначно визначено вектор C_{-1}.Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема 2. *нехай* $\det\widetilde{B}_2((k-1)a) \neq 0,\ k = 1,2.$ *і* $\det\Delta_1 \neq 0$. *Тоді для досить малих значень параметра* $\varepsilon > 0$ *система 2n алгебраїчних рівнянь (44) має єдиний* розв'язок.

Вивчимо більш детально розв'язок системи (44) коли $r = -2$. Оскільки другі крайові умови (19) однорідні, то $\Gamma_{-2}^2 = 0$, тобто $C_{-2}^2 = 0,$. Перша система (45) коли $r = -2$. неоднорідна за рахунок присутності доданку $b_1(x) f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)$.

Отже, розв'язок першої ітераційної задачі (19) має вигляд

$$W_{-2}(x,t) = b_1(x)[\sum_{k=1}^{2} V_{(-2)1k}(x) U_k(t_1) + f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)] + \sum_{i=p+s+1}^{n} b_i(x)\omega_{(-2)i}(x). \quad (47)$$

При підстановці розв'язку $W_{-1}(x,t)$ у крайові умови (20) для визначення невідомого вектора C_{-1} ми знову отримали систему $2n$ алгебраїчних рівнянь (44) при $r = -1$. За описаною схемою, буде однозначно визначено вектор-функція $W_{-1}(x,t)$.

Продовжуючи далі визначати вектори $C_r,\ r > -1$ можна показати, що кожна ітераційна задача (18)-(21) у ПБР (9) має єдиний розв'язок. А це означає, що серія ітераційних задач (19)-(22) асимптотично коректна в ПБР (9).

Побудований формальний ряд розв'язку розширеної задачі (6) містить доданки з від'ємними степенями малого параметру. Оскільки функції Ейрі $U_k(t_1) \approx \mathbf{O}(1)$ і тим більше $\omega_{(-2)i}(x) \approx \mathbf{O}(1)$, то побудований розв'язок необмежено зростає при прямуванні малого параметра до нуля.

По аналогії з попередніми працями (див.[1-3]) покажемо, що за при спеціальному виборі початкових векторів $\alpha_m,\ m = 0,a$ головний член асимптотики розв'язку СЗЗ (1), а відповідно, і вся асимптотика розв'язку цієї задачі, може бути отримана в більш простішому вигляді, причому отримана таким чином асимптотика розв'язку буде вже рівномірно придатна і відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.

Нами вже було показано, що $\Gamma_{-2}^2 = 0$. Будемо вимагати, щоб $\Gamma_{-2}^1 = 0$, тобто задамо частину компонент векторів $\alpha_m,\ m = 0,a$ у вигляді

$$\alpha_{m\nu} = b_{1\nu}(m) f_{(-2)1}(m)\Psi(t_1(m)) + \sum_{i=p+s+1}^{n} b_{i\nu}(m)\omega_{(-2)i}(m), \quad \nu = \overline{1 \bigcup p+s+1, n}. \quad (48)$$

При виконанні умов (48) нами буде отримана однорідна система рівнянь $\Delta_1 C_{-2}^1 = 0$, тобто $C_{-2}^1 = 0$. У цьому випадку розв'язок (47) набуде найпростішого вигляду, тобто $W_{-2}(x,t) = b_1(x) f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)$.

Дослідимо праву частину системи (44) при $r = -1$. Якщо взяти

$$\alpha_{m\nu} = b_{1\nu}(m)\varphi_1'(m) f_{(-2)1}(m)\Psi'(t_1(m)), \ \mathrm{m} = 0, \mathrm{a}, \quad \nu = \overline{1 \bigcup p+s+1, n}, \quad (49)$$

то отримаємо однорідну систему $\Delta_2 C_{-1}^2 = 0$, тобто, $C_{-1}^2 = 0$.

Перша система (45) при $r = -1$ теж буде однорідною.

Таким чином, при виконанні умов (49) розв'язком задачі (23) буде $W_{-1}(x,t) \equiv 0$.

Висновок 8. Якщо компоненти векторів α_m, $m = 0, a$ вибрати у вигляді формул (48) і (49), то розв'язком розширеної задачі (6) буде ряд

$$\widetilde{W}(x,t,\varepsilon) = \mu^{-2} b_1(x) f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1) + \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r W_r(x,t). \quad (50)$$

8. Оцінка залишкового члена асимптотики розв'язку. Запишемо формальний ряд (50) у вигляді тотожності

$$\widetilde{W}(x,t,\varepsilon) \equiv W_{\varepsilon q}(x,t,\mu) + \widetilde{\xi}_{q+1}(x,t,\varepsilon),$$

де $W_{\varepsilon q}(x,t,\mu)$ – часткова q - сума ряду (50), а $\mu^{q+1}\widetilde{\xi}_{q+1}(x,t,\varepsilon) -$ залишковий член цього ряду. Проведемо звуження в тотожності (50) коли $t = \Phi(x,\varepsilon)$. Отримаємо тотожність

$$\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv W(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) \equiv W_{\varepsilon q}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \xi_{q+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon). \quad (51)$$

Скориставшись відомою методикою (див.[1-3]), отримаємо наступну оцінку залишкового члена асимптотики розв'язку СЗЗ (1):

$$\left\|\xi_{q+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le \mu^{q+1/2} K_{q+1}, \quad \mathrm{q}>0, \quad (52)$$

де постійна K_{q+1} не залежить від $x \in I$ і малого параметру $\varepsilon > 0$.

У частинному випадку, коли $q = 0$ за рахунок того, що $Q_{0ik}(x) \equiv 0$, на довільному компакті відрізка I, який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ має місце оцінка

$$\left\|\xi_1(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le \mu K_1. \quad (53)$$

Скориставшись оцінками (52) і (53), можна показати, що на довільному компакті відрізка I, який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ справедлива оцінка

$$\lim_{\varepsilon \to +0} W(x,\varepsilon) = \omega(x), \quad (54)$$

де $\omega(x)$ – розв'язок виродженого векторного рівняння (3).

Сформулюємо у вигляді загальної теореми отримані результати.

Теорема 3. *Нехай: 1) для СЗЗ (1) виконуються Умови 1^0 і 2^0;*

*2) лінійний оператор **A** еквівалентний канонічній матриці (4).*

3) $\det \widetilde{B}_2((k-1)a) \neq 0, \ k = 1,2$ і $\det \Delta_1 \neq 0$.

Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$:

1) описаним вище методом для розв'язку розширеної задачі (8) в ПБР (12) може бути побудований єдиний формальний ряд (18);

2) звуження формального ряду (17) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$ є асимптотичним рядом розв'язку СЗЗ (1);

3) залишковий член асимптотики розв'язку СЗЗ (1) має оцінки, зображені співвідношеннями (52) і (53);

4) на довільному компакті відрізка I, який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ справедлива гранична рівність (54).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. ур.-ия. -1991.- **27**, № 9.-С.1505-1515.
2. Бобочко В.М. Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр.мат.журн.-1996.- **48**, № 2.-С.147-160.
3. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. ур.-ия. -1998.- **34**, № 10.-С.1304-1312.
4. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.– М.: Наука. 1981.- 400 с.
5. Шкиль Н. И., Старун И.И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- К.: Выща школа, 1987.- 288 с.
6. Langer R. On the asymptotic forms of the solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point //Trans. Amer. Math. Soc. - 1955.- 80.- P. 93-123.
7. Wasow W. A studi of the solutions of the differential equations $y^{(4)} + \lambda^2 (xy'' + y) = 0$ for large values of λ. // Ann. Math.- 1950.-**2.**-P. 350-361.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. -М.: Изд-во технико-теор. лит.,-1953. -492 с.
9. Треногин В. А. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980.- 496 с.
10. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН.- 1952 - Т.27, вып.6(52).- с. 3-96.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.- М.: Мир, 1972. - 740 с.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 22 вересня 2004р.